Завдання XXII обласного турніру юних математиків

1. «Діофантові рівняння»

а) Доведіть, що для довільних натуральних чисел a та b рівняння $x^2 - xy - y^2 = a^2 + ab - b^2$ має нескінченну кількість розв'язків у натуральних числах x та y.

б) Скінченною чи нескінченною є множина пар взаємно простих натуральних чисел a та b, для яких рівняння

$$x^4 - x^2y^2 - y^4 = a^4 + a^2b^2 - b^4$$

має розв'язки у натуральних числах x та y?

в) Чи має це рівняння розв'язки у натуральних числах x та y, якщо $a = b = 1$?

2. «Дві нерівності»

Для всіх натуральних чисел n доведіть нерівності:

а) $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1}\right) \le \frac{9}{8}n^2$;

б) $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{2k^2+k-1}{k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{2k^2-k}{k+1}\right) \le \frac{9}{8}n^4$.

3. «Нерівність для середніх»

Нехай m – натуральне число. Знайдіть усі такі натуральні k, що для довільних додатних a та b справедлива нерівність:

$$\frac{a^{m+1}+b^{m+1}}{a^m+b^m} \ge \sqrt[k]{\frac{a^k+b^k}{2}}.$$

4. «Спортлото»

У Лототроні міститься 36 занумерованих кульок. Під час розіграшу лотереї випадає шість кульок. Гравець купує білет і записує в ньому номери шести кульок, які, на його думку, випадуть під час розіграшу. Чи може гравець купити 12 білетів і гарантовано, принаймні в одному з них, вгадати щонайменше два номери?

5. «Розбиття числа»

а) Чи існує натуральне число N, яке можна щонайменше 100 способами подати як суму двох простих чисел: $N = p_1 + q_1 = p_2 + q_2 = \ldots$?

б) Чи існує натуральне число N, яке можна щонайменше 100 способами подати як суму двох квадратів натуральних чисел: $N = a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = \ldots$?

6. «Цікаві числові набори»

а) Скінченною чи нескінченною є множина четвірок натуральних чисел таких, що добуток будь-яких двох чисел кожної такої четвірки, збільшений на 1, є квадратом натурального числа?

б) Вкажіть хоч одну п'ятірку різних додатних раціональних чисел таких, що жодне з них не є натуральним числом і добуток будь-яких двох із цих чисел, збільшений на 1, є квадратом раціонального числа.

7. «Подільність на 37»

Раціональне число $\frac{r}{s}$ є сумою 35-ти дробів $\frac{1}{2^2}, \frac{2}{3^2}, \frac{3}{4^2}, \ldots, \frac{35}{36^2}$, де r та s – цілі числа. Доведіть, що r ділиться на 37.

8. «Рівнобедрені трикутники»

Ганнуся, Петрусь та Миколка незалежно одне від одного намалювали по одному рівнобедреному трикутнику ABC, всі кути яких вимірюються цілим числом градусів. Виявилося, що основи AC цих трикутників рівні і для кожного з них на промені BC існує така точка E, що $BE = AC$, а кут AEC також вимірюється цілим числом градусів. Чи обов'язково:

а) всі три намальовані трикутники рівні між собою;

б) серед них знайдуться принаймні два рівні трикутники?

9. «Вписані кола»

На стороні BC нерівнобедреного трикутника ABC вибрали точку D і в кожен із трикутників ABD та ACD вписали коло. Потім усе витерли, залишивши лише два кола. Відомо, з якого боку від їхньої лінії центрів розташована вершина A. За допомогою циркуля і лінійки відновіть трикутник ABC, якщо ми знаємо, що в ньому:

а) AD є бісектрисою;

б) AD є медіаною.

10. «Характеризація ортоцентра»

На висоті AH_1 гострокутного нерівнобедреного трикутника ABC з попарно різними сторонами вибрали деяку точку X, з якої на сторони AB та AC опустили перпендикуляри XN та XM відповідно. Виявилося, що H_1A – бісектриса кута MH_1N. Доведіть, що X – точка перетину висот трикутника ABC.

11. «Зовнівписані кола»

Нехай ω_a, ω_b, ω_c – зовнівписані кола, що дотикаються до сторін a, b, c трикутника ABC відповідно; I_a, I_b, I_c – центри цих кіл; T_a, T_b, T_c – точки дотику цих кіл до прямої BC. Прямі T_bI_c та T_cI_b перетинаються в точці Q. Доведіть, що центр кола, вписаного у трикутник ABC, лежить на прямій T_aQ.

12. «Урівноважене розбиття»

На площині задано n різних точок. Розбиття цієї множини точок на дві непорожні підмножини $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ та $\{B_1, B_2, \ldots, B_{n-k}\}$ назвемо *врівноваженим*, якщо для цього розбиття на площині знайдеться така точка *M*, що $MA_1 + MA_2 + \ldots + MA_k = MB_1 + MB_2 + \ldots + MB_{n-k}$.

а) Доведіть, що для будь-якого набору з $n \geq 2$ точок існує хоч одне врівноважене розбиття.

б) Доведіть, що для будь-якого набору з парною кількістю $n \geq 2$ точок існує хоч одне врівноважене розбиття на множини з $\frac{n}{2}$ точок у кожній.

в) Доведіть, що для кожного $n \geq 2$ існує набір із n точок, для якого кількість урівноважених розбиттів не менша за 2^{n-2}. При цьому розбиття, в яких дві множини просто міняються між собою, вважаємо однаковими.

13. «Замощення паралелограмами»

Петрик має однакові паралелограми з кутами $45°$ та $135°$ і довжинами сторін 1 та $\sqrt{2}$.

а) Доведіть, що у прямокутну коробку розміру $2 \times n$, $n \geq 2$, він не зможе помістити більше ніж $2n-2$ параллелограми.

б) Доведіть, що у квадратну коробку розміру 4×4 він не зможе помістити 13 паралелограмів. Наведіть приклад розміщення 12 паралелограмів у коробці.

в) Наведіть приклад розміщення $4n-4$ паралелограмів у коробці розміру $4 \times n$, $n \geq 4$.

Паралелограми можна перевертати.

14. «Колонія мікроорганізмів»

За допомогою мікроскопу вчені вивчають n мікроорганізмів, які є ідентичними між собою в усьому, крім розмірів та швидкості росту. Кожен мікроорганізм росте з певною лінійною швидкістю, яка для різних організмів може бути різною. Щохвилини вчені проводять спостереження: вони дивляться у мікроскоп та занотовують n чисел, що відповідають розмірам мікроорганізмів у даний момент часу (порядок чисел виявляється довільним, оскільки організми весь час рухаються).

а) Доведіть, що існує число m, яке може залежати від n, але не залежить від набору мікроорганізмів, таке що після m спостережень вчені гарантовано зможуть вивести набір із n швидкостей, з якими ростуть мікроорганізми.

б) Чи можна покласти $m = 3$?

15. «Архімед зважує злитки»

а) Цар Сиракуз Гієрон мав 6 золотих злитків. На вигляд злитки схожі, проте маси у них різні (однакових мас немає). Архімеду видали терези зі стрілкою і бирки з номерами від 1 до n. Гієрон наказав Архімеду зважити ці злитки й на кожний приклеїти бирку так, щоб номери йшли за зростанням мас. При цьому Архімеду видають злитки по одному й одразу після зважування й наклеювання бирки його забирають (тобто змінити бирку вже не можна). Проте дозволяється, щоб номери йшли не за порядком: наприклад, можна, щоби найлегший мав номер 3, другий за масою – 8 тощо. Для якого мінімального n Архімед може бути певен, що зуміє впоратись із завданням?

б) Усе те саме, але поставлено додаткову умову: *різниці між номерами не повинні зменшуватись*, точніше, повинно виконуватись $a_1 \le a_2 - a_1 \le a_3 - a_2 \le ...$ Чи вистачить Архімеду ста тисяч номерів? А мільйон? Укажіть яке-небудь число n, для якого Архімед явно зможе виконати завдання.

16. «Блукання по дільниках»

Двоє грають у таку гру. Перший називає будь-який натуральний дільник числа 1000000, а далі гравці по черзі множать або ділять останній названий дільник на просте число так, щоб отриманий результат був знову дільником числа 1000000, який не називався раніше. Гравець, який не зможе зробити хід, програє. Хто з гравців може гарантувати собі перемогу?

17. «Чарівна фішка»

На дошці відмічено n точок, які є вершинами правильного n-кутника. В одній із точок знаходиться фішка. Два гравці по черзі переміщують її в іншу відмічену точку і при цьому малюють відрізок, що їх сполучає. Якщо дві точки вже з'єднані відрізком, то такий хід заборонений. Гравець, який не зможе зробити хід, програє. Хто з гравців може гарантувати собі перемогу?

18. «Гра з арифметичною прогресією»

Задано чотири послідовні члени арифметичної прогресії a_1, a_2, a_3, a_4. Ганнуся й Миколка грають у таку гру. Вони по черзі (першою ходить Ганнуся) вибирають одне з чотирьох заданих чисел і записують його замість символу $*$ у вираз $*\cdot* - *\cdot*$, де крапка – це знак множення. Після чотирьох ходів у виразі кожне із заданих чисел зустрічається по одному разу. Якщо значення виразу є від'ємним, то виграє Миколка; в іншому випадку виграє Ганнуся. Чи є у Ганнусі виграшна стратегія?

19. «Тура і коні»

На шахівниці розмістіть туру і найбільшу кількість коней так, щоб жодна фігура не била іншу.

20. «Розмістити шахові фігури»

Маємо шахівницю й 8 фігур: король, ферзь, дві тури, два слони та два коні. Потрібно випадковим чином розставити ці фігури на першій горизонталі так, щоб виконувались умови:

1) король мусить стояти між турами;

2) слони повинні бути різнопільними;

3) усі розміщення, що задовольняють обидві попередні умови, рівноймовірні.

а) Скільки існує різних розміщень за умов 1–2?

б) Скласти алгоритм генерації розміщень, що задовольняє умови 1–3, якщо у ролі генератора випадкових чисел виступає колода із 5 карт.

21. «Особливий ребус»

8	Ш	а				Х		
7				ш	х		Ш	
6				о				
5	о		Л				к	А
4								а
3				а		і		
2		Г	ш	Ш				О
1			х		К		х	
	a	b	c	d	e	f	g	h

На діаграмі кожна літера відповідає певному типові шахової фігури. Великі літери – це фігури одного кольору, малі літери – фігури іншого кольору. У цьому *особливому* ребусі фігури можуть бути «представлені» більш ніж однією літерою. Наприклад, коні можуть бути «закодовані» одночасно літерами Ш та А. Визначіть позицію і останній хід.